

Abstract

Tipologie di tassi di interesse: TAN, TPE e TAE

(Articolo completo pubblicato sulla rivista "Le controversie Bancarie" n. 29)

Antonio Annibali¹ - Alessandro Annibali² - Carla Barracchini³ - Francesco Olivieri⁴

¹ Professore Ordinario fr di Matematica Finanziaria, Attuario - Facoltà di Economia, Università degli Studi 'La Sapienza' di Roma
- email: antonio.annibali@uniroma1.it, antonio.annibali@gmail.com, antonio.annibali@legalmail.it

² Ingegnere finanziario senior developer –EDWH expert - email: alexannibali@openaccess.it - Sito: www.attuariale.eu

³ Professore Associato di Matematica Finanziaria, Dipartimento di Ingegneria industriale, di Informatica e di Economia, Università degli studi de L'Aquila - email: carla.barracchini@ec.univaq.it

⁴ Attuario professionista – Consulente Tecnico di ufficio presso il Tribunale di Roma - email: olivierifrancesco@alice.it

Nell'attività di valutazione delle operazioni finanziarie si incontrano grandezze diverse, le quali concorrono, attraverso gli algoritmi (leggi) di calcolo, alla definizione dei risultati cercati.

In particolare, tali grandezze sono:

- importi monetari,
- tempi di riferimento di detti importi,
- coefficienti (esogeni) di proporzionalità, chiamati tassi d'interesse (oppure di sconto).

Con riferimento ai tassi di interesse, le caratteristiche più importanti da considerare sono:

- la tipologia: tassi d'interesse effettivi oppure tassi d'interesse nominali,
- la loro eventuale equivalenza,
- il regime finanziario adottato per i calcoli (capitalizzazione composta oppure semplice).

*Un **tasso d'interesse periodale effettivo (TPE)** è un tasso nel quale il periodo di riferimento (anno, semestre, quadrimestre, trimestre, bimestre, mese, ...) coincide con il periodo di applicazione del tasso stesso. Si parla quindi di*

- **TAE** – Tasso annuo effettivo
- **TSE** – Tasso semestrale effettivo
- **TQE** – Tasso quadrimestrale effettivo
- **TTE** – Tasso trimestrale effettivo
- **TBE** – Tasso bimestrale effettivo
- **TME** – Tasso mensile effettivo

esistono anche tassi effettivi con periodi di riferimento (ed applicazione) più piccoli, quali ad esempio: tassi effettivi quindicennali, settimanali, giornalieri, orari, per minuto, per secondo e così via, oppure con periodi di riferimento (ed applicazione) più grandi, quali ad esempio: tassi effettivi biennali, triennali, quinquennali, ecc.

Un **tasso d'interesse periodale nominale (TPN)** è un tasso nel quale il periodo di applicazione non coincide necessariamente con il periodo di riferimento, (se coincidesse, sarebbe **effettivo**) ma ne costituisce una frazione, corrispondente al periodo di riferimento diviso per un numero (m), denominato **convertibilità**:

- TAN_m – Tasso annuo nominale con convertibilità m volte nell'anno
- TSN_m – Tasso semestrale nominale con convertibilità m volte nel semestre
- TQN_m – Tasso quadrimestrale nominale con convertibilità m volte nel quadrimestre
- TTN_m – Tasso trimestrale nominale con convertibilità m volte nel trimestre
- TBN_m – Tasso bimestrale nominale con convertibilità m volte nel bimestre
- TMN_m – Tasso mensile nominale con convertibilità m volte nel mese

Facendo riferimento al caso più ricorrente, riguardante il tasso annuo nominale TAN_m , i diversi frazionamenti sono indicati nel modo seguente:

- TAN_1 – Tasso annuo nominale con convertibilità annuale = coincide con **TAE**
- TAN_2 – Tasso annuo nominale con convertibilità semestrale
- TAN_3 – Tasso annuo nominale con convertibilità quadrimestrale
- TAN_4 – Tasso annuo nominale con convertibilità trimestrale
- TAN_6 – Tasso annuo nominale con convertibilità bimestrale
- TAN_{12} – Tasso annuo nominale con convertibilità mensile

Nota: ad $m=24, 52, 360, 8640, 518400, 31104000$ corrispondono i tassi nominali con convertibilità quindicennale, settimanale, giornaliera, oraria, per minuto e per secondo (assimilabile alla convertibilità istantanea)

Dato un tasso annuo nominale TAN_m , con convertibilità (m), il tasso periodale effettivo **TPE**, relativo al $1/m$ di anno, si ottiene rapportando il tasso nominale alla sua convertibilità

$$TPE = \frac{TAN_m}{m}$$

e in particolare

$$TAE = TAN_1, TSE = \frac{TAN_2}{2}, TQE = \frac{TAN_3}{3}, TTE = \frac{TAN_4}{4}, TBE = \frac{TAN_6}{6}, TME = \frac{TAN_{12}}{12}$$

Esempio: Dato il tasso annuo nominale, con convertibilità mensile: TAN_{12} pari al **6.00%**, il tasso mensile effettivo **TME** risulta pari allo **0.50%**

$$TME = \frac{TAN_{12}}{12} = \frac{0.06}{12} = 0.005$$



La relazione $TAN_1 = TAE$ mostra l'uguaglianza esistente tra il tasso annuo nominale, con convertibilità annuale ($m=1$), e il tasso annuo effettivo. Nel caso di adozione del regime finanziario della capitalizzazione semplice, tale relazione di uguaglianza vale per qualsiasi convertibilità (m): $TAN_m = TAE$; tale proprietà deriva dal fatto che in tale regime finanziario, poiché gli interessi precedentemente maturati non producono ulteriori interessi, tra i tassi effettivi vige una proporzionalità, basata sull'ampiezza dei diversi periodi di riferimento, senza dover tener conto dell'ampiezza dei periodi applicazione:

$$TAE = 2 \cdot TSE = 3 \cdot TQE = 4 \cdot TTE = 6 \cdot TBE = 12 \cdot TME$$

Diversa è la situazione nel caso di adozione del regime finanziario della capitalizzazione composta, nel quale le relazioni tra il TAE e i diversi tassi periodali effettivi TPE , con diverso periodo di riferimento (pari ad $1/m$ di anno), non sono caratterizzate da proporzionalità, ma da relazioni di tipo esponenziale:

$$TAE = (1 + TSE)^2 - 1 = (1 + TQE)^3 - 1 = (1 + TTE)^4 - 1 = \\ = (1 + TBE)^6 - 1 = (1 + TME)^{12} - 1$$

da cui deriva

$$TAE = \left(1 + \frac{TAN_2}{2}\right)^2 - 1 = \left(1 + \frac{TAN_3}{3}\right)^3 - 1 = \left(1 + \frac{TAN_4}{4}\right)^4 - 1 = \\ = \left(1 + \frac{TAN_6}{6}\right)^6 - 1 = \left(1 + \frac{TAN_{12}}{12}\right)^{12} - 1$$

ossia in generale

$$TAE = \begin{cases} (1 + TPE)^m - 1 \\ \left(1 + \frac{TAN_m}{m}\right)^m - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} TPE = (1 + TAE)^{\frac{1}{m}} - 1 \\ TAN_m = m \left((1 + TAE)^{\frac{1}{m}} - 1 \right) \end{cases}$$

Esempio (precedente): Dato il tasso annuo nominale, con convertibilità mensile TAN_{12} pari al **6.00%**, il tasso annuo effettivo TAE risulta pari al **6.1677812%**

$$TAE = \left(1 + \frac{TAN_{12}}{12}\right)^{12} - 1 = (1 + TME)^{12} - 1 = 1.005^{12} - 1 = 0.061677812$$

I due tassi $TAN_{12} = 6.00\%$ e $TAE = 6.1677812\%$ non sono numericamente uguali, ma sono tra loro equivalenti, in quanto corrispondono allo stesso TME pari allo **0.50%**

$$TME = \begin{cases} (1 + TAE)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1.061677812^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.005 \\ \frac{TAN_{12}}{12} = \frac{0.06}{12} = 0.005 \end{cases}$$



ciò significa che, al fine della definizione del tasso periodale effettivo, è indifferente conoscere il tasso annuo nominale oppure il tasso annuo effettivo equivalente, in quanto dalla conoscenza dell'uno si può derivare la conoscenza dell'altro e da ognuno dei due si può ottenere la determinazione dello stesso tasso periodale effettivo.

Due tassi annui nominali, con diversa convertibilità m_1 e m_2 , risultano tra loro equivalenti, se sono equivalenti allo stesso TAE

$$TAE = \begin{cases} \left(1 + \frac{TAN_{m_1}}{m_1}\right)^{m_1} - 1 \\ \left(1 + \frac{TAN_{m_2}}{m_2}\right)^{m_2} - 1 \end{cases} \Rightarrow TAN_{m_1} = m_1 \left(\left(1 + \frac{TAN_{m_2}}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{m_1}} - 1 \right)$$

Esempio: I due tassi annui nominali $TAN_2 = 6.00\%$ (con convertibilità semestrale) e $TAN_3 = 6.00\%$ (con convertibilità quadrimestrale) non sono equivalenti, infatti

$$\frac{TAN_2}{6.00\%} \neq \frac{TAN_3}{6.00\%} \Leftrightarrow \underbrace{\left(1 + \frac{0.06}{2}\right)^2 - 1}_{6.09\%} \neq \underbrace{\left(1 + \frac{0.06}{3}\right)^3 - 1}_{6.1208\%}$$

Esempio: I due tassi annui nominali $TAN_4 = 5.869538\%$ (con convertibilità trimestrale) e $TAN_6 = 5.855276\%$ (con convertibilità bimestrale) sono equivalenti, infatti

$$\frac{TAN_4}{5.869538\%} \equiv \frac{TAN_6}{5.855276\%} \Leftrightarrow \underbrace{\left(1 + \frac{0.05869538}{4}\right)^4 - 1}_{6.00\%} = \underbrace{\left(1 + \frac{0.05855276}{6}\right)^6 - 1}_{6.00\%}$$

Esempio: Calcolo di tassi d'interesse annui nominali TAN_{m_1} equivalenti al tasso $TAN_{m_2} = 10\%$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	10%	m_2	1	2	3	4	6	12
2	m_1		$TAN_1=TAE$	TAN_2	TAN_3	TAN_4	TAN_6	TAN_{12}
3	1	$TAN_1=TAE$	10.0000%	10.2500%	10.3370%	10.3813%	10.4260%	10.4713%
4	2	TAN_2	9.7618%	10.0000%	10.0829%	10.1250%	10.1676%	10.2107%
5	3	TAN_3	9.6840%	9.9185%	10.0000%	10.0414%	10.0833%	10.1257%
6	4	TAN_4	9.6455%	9.8780%	9.9589%	10.0000%	10.0416%	10.0836%
7	6	TAN_6	9.6071%	9.8378%	9.9180%	9.9588%	10.0000%	10.0417%
8	12	TAN_{12}	9.5690%	9.7978%	9.8774%	9.9178%	9.9587%	10.0000%



	A	B	C	D
1	0.1	m_2	1	2
2	m_1		$TAN_1 = TAE$	TAN_2
3	1	$TAN_1 = TAE$	$= \$A3 * ((1 + \$A\$1 / C\$1) ^ (C\$1 / \$A3) - 1)$	$= \$A3 * ((1 + \$A\$1 / D\$1) ^ (D\$1 / \$A3) - 1)$
4	2	TAN_2	$= \$A4 * ((1 + \$A\$1 / C\$1) ^ (C\$1 / \$A4) - 1)$	$= \$A4 * ((1 + \$A\$1 / D\$1) ^ (D\$1 / \$A4) - 1)$
5	3	TAN_3	$= \$A5 * ((1 + \$A\$1 / C\$1) ^ (C\$1 / \$A5) - 1)$	$= \$A5 * ((1 + \$A\$1 / D\$1) ^ (D\$1 / \$A5) - 1)$
6	4	TAN_4	$= \$A6 * ((1 + \$A\$1 / C\$1) ^ (C\$1 / \$A6) - 1)$	$= \$A6 * ((1 + \$A\$1 / D\$1) ^ (D\$1 / \$A6) - 1)$
7	6	TAN_6	$= \$A7 * ((1 + \$A\$1 / C\$1) ^ (C\$1 / \$A7) - 1)$	$= \$A7 * ((1 + \$A\$1 / D\$1) ^ (D\$1 / \$A7) - 1)$
8	12	TAN_{12}	$= \$A8 * ((1 + \$A\$1 / C\$1) ^ (C\$1 / \$A8) - 1)$	$= \$A8 * ((1 + \$A\$1 / D\$1) ^ (D\$1 / \$A8) - 1)$