SPOSTAMENTO DI CAPITALI NEL TEMPO

Francesco Olivieri

Attuario professionista - Consulente tecnico d’ufficio

Mob. 338.8706997

Mail: olivierifrancesco@alice.it

Le controversie tra banca e utente tra diritto di credito, diritto d’impresa e diritti fondamentali.

18 febbraio 2022

Agenda

- **REGIMI FINANIZARI DI CAPITALIZZAZIONE: CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA E SEMPLICE**

- **TASSI EQUIVALENTI**

- **LEGGE DI SCINDIBILITA'**

Introduzione ai regimi finanziari di capitalizzazione - 1.2

In merito alle transazioni economiche, nel caso specifico di ottenimento ed estinzione mutuo, il valore delle relative variabili è riferito a un istante individuato dalla coppia (C, t).

Tali valori possono essere trasferiti nel tempo secondo regole precise di matematica finanziaria.

Siano:

- C, il capitale
- t, tempo di riferimento
- I, l' interesse complessivo
- V, il valore attuale
- M, il montante
- i, il tasso di interesse annuo effettivo.

Si può affermare che M, dato C e i , rappresenta una funzione del tempo.

Introduzione ai regimi finanziari di capitalizzazione - 2.2

Lo spostamento in avanti dei valori nel tempo implica il pagamento di interessi.

Da qui la necessità di distinguere il *regime finanziario di capitalizzazione (regole di calcolo)* e il tasso di interesse.

Il regime di capitalizzazione riguarda sia il principio matematico su cui si basa il calcolo degli interessi sia la scelta se e come gli interessi «diventino» capitale.

Esistono infiniti regimi di capitalizzazione ma la successiva trattazione si riferisce a quelli comunemente utilizzati:

1. **regime della capitalizzazione composta;**
2. **regime della capitalizzazione semplice.**

La capitalizzazione composta

Nel regime della capitalizzazione composta gli interessi che maturano in ogni periodo di riferimento (anno, trimestre, mese, ecc..) «diventano capitale», nel senso che entrano nella base di calcolo per il periodo successivo.

Si tratta cioè di un regime matematico detto «Capitalizzazione Composta» in cui, suddivisa la durata dell'impiego in periodi, l'interesse maturato si aggiunge al capitale per produrre, insieme con esso, nuovo interesse nei periodi successivi.

Il fattore $(\mathbf{1}+\mathbf{i})^{\mathbf{t}}$ rappresenta il **fattore di capitalizzazione composta** e può essere considerato come un treno che consente di trasportare qualsiasi capitale nel tempo (avanti o indietro), per ottenere la valutazione del capitale in qualsiasi istante temporale.

Montante e valore attuale in capitalizzazione composta

- M_t(montante all'epoca t) = $C_0\ (1+i)^t$;
- I = M_t - C_0= $C_0\ (1+i)^t$ - C_0 = $C_0\ [(1+i)^t - 1]$

Quando il capitale iniziale C_0 viene **spinto in avanti** nel tempo basta moltiplicare il capitale per **il fattore di capitalizzazione composta** $(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{t}}$.

Se il capitale C_t è un capitale disponibile in futuro, dopo t anni, esso può essere **attualizzato** (portato all'epoca zero).

Il valore attuale del capitale disponibile tra t anni (C_t) è pari a:

- V = $C_t\ (1+i)^{-t}$

dove $(\mathbf{1}+\boldsymbol{i})^{-\boldsymbol{t}}$ **indica il fattore di attualizzazione** nel regime di C. composta.

Tempo di capitalizzazione in regime composto

Nel caso in cui le rate vengano pagate in periodi infra annuali il tasso di interesse deve essere sempre coerente con la frequenza con cui vengono pagate le rate.

Capitalizzazione e attualizzazione sono due operazioni l'una inversa dell'altra dal punto di vista logico-matematico.

In pratica, per la matematica finanziaria, si tratta semplicemente della valutazione di un capitale C che, spostandolo nel tempo, genera un valore equivalente rispetto a un altro istante di valutazione.
Tale valore è funzione del tempo (in avanti o indietro, t e –t) e del tasso di valutazione.

Capitalizzazione e attualizzazione in regime composto

La capitalizzazione o l'attualizzazione dipende dalla direzione e dalla misura dello spostamento nel tempo.

Se il capitale C viene spostato in avanti si ha un processo di capitalizzazione, se viene spostato all'indietro si ha un processo di attualizzazione.

Il fattore di valutazione può assumere valori positivi o negativi:

- $(1 + i)^t$
- $(1 + i)^{-t}$

Fissata la coppia (C,t) e il tasso (i), il fattore di valutazione consente di determinare il valore equivalente al capitale iniziale per ogni istante componente la misura di t.

Capitalizzazione semplice - 1.2

In capitalizzazione semplice l'interesse è proporzionale al capitale iniziale, in una misura che dipende dal tempo trascorso e dal tasso di interesse.

Di conseguenza, la base di calcolo degli interessi rimane sempre fissa, uguale al capitale prestato, in quanto gli interessi non «diventano» mai capitale.

Sia:
C_0, capitale iniziale
I, interessi maturati
t, misura del tempo per produrre I

allora:
$I = C_0 it;$
$M_t = C_0 + I = C_0 + C_0\ it = C_0(1+it).$

Capitalizzazione semplice - 2.2

Si può affermare che per due individui che stipulano l'operazione, è equo uno scambio di C_0 all'epoca zero con C_0(1 + it) all'epoca t.

Dal punto di vista finanziario i due valori sono equivalenti.

Posto C_0=1, si ha il fattore di capitalizzazione semplice (1+it) che rappresenta il «**motore di trasporto**» con cui il capitale C_0 diventa C_t= C_0(1+ it).

Il capitale C_t, disponibile in futuro, può essere **attualizzato** (portato all'epoca zero):

$$\boldsymbol{C_t\ (disponibile\ fra\ t\ anni)\ =\ C_0/(\ 1+it)}$$

Osservazioni sui regimi di capitalizzazione

- **Nel regime della capitalizzazione semplice**, l'interesse I matura in modo proporzionale al:

  - capitale (C),
  - tempo trascorso (t),
  - tasso di interesse (i),

  secondo la relazione I = Cit.

  La regola matematica di base del regime semplice è che l'interesse maturi sempre, per ogni t, sul capitale iniziale, e questo genera la formula del montante $C_t = C_0\ (1 + it)$. Il capitale cresce rispetto al tempo in forma lineare.

- **Nel regime composto**, dopo un certo periodo di tempo, l'interesse diventa capitale e ciò genera una continua variazione nel tempo della base di calcolo degli interessi. Il montante si ottiene dalla formula $C_t = C_0\ (1 + i)^t$

Agenda

- REGIMI FINANIZARI DI CAPITALIZZAZIONE: CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA E SEMPLICE

- TASSI EQUIVALENTI

- LEGGE DI SCINDIBILITA’

Tassi equivalenti – 1.3

Due (o più) tassi si dicono equivalenti quando, dati un capitale ed un periodo di impiego, producono i medesimi interessi.

Nelle transazioni economiche è necessario esprimere il tasso e il tempo nella stessa unità di misura.
Così, se il tasso è trimestrale il tempo deve essere espresso in trimestri.

E' necessario, dunque, «adeguare» il tempo all'unità di misura del tasso oppure trasformare il tasso: si tratta di generare un tasso equivalente rispetto al tasso dato.

Dato un capitale iniziale $C_0=1$ e un tempo di capitalizzazione t, **due tassi si dicono equivalenti se generano lo stesso montante alla fine del periodo, con diverse «frequenze di capitalizzazione».**

Tassi equivalenti – 2.3

In pratica, dato:

- i_k tasso effettivo relativo a 1_{kmo} di anno (così, i_2 sarà un tasso semestrale, i_4 un tasso trimestrale, i_{12} un tasso mensile)
- i tasso effettivo annuo

allora **la relazione fondamentale fra tassi equivalenti è** la seguente:

$$\mathbf{(i + i) = (1 + i_k)^k}$$

La condizione di equivalenza fra il tasso annuo i e il tasso i_k, relativo a 1_{kmo} di anno, si ha ponendo che il montante del capitale C per un certo periodo di tempo t è lo stesso con i due tassi:

$(1 + i)^t = (1 + i_k)^{tk}$, da cui, estraendo la radice t-ma, si ha

$\sqrt[t]{(1 + i)\text{^}t} = \sqrt[t]{(1 + i_k)^{tk}}$; (1 + i) = $(1 + i_{k)})^k$, da cui

i = $(1 + i_k)^k$ - 1.

Tassi equivalenti – 3.3

Dato il tasso annuo effettivo i, si può trovare il tasso effettivo i_k, equivalente a 1_{kmo} di anno:

$$\sqrt[k]{(1+i)} = 1 + i_k;$$

$$i_k = \sqrt[k]{1+i} - 1 = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$$

Agenda

- **REGIMI FINANIZARI DI CAPITALIZZAZIONE: CAPITALIZZAZIONE COMPOSTA E SEMPLICE**

- **TASSI EQUIVALENTI**

- **LEGGE DI SCINDIBILITA'**

Scindibilità di leggi finanziarie – 1.2

Dato un:

- capitale (C)
- tasso effettivo (i)
- tempo di capitalizzazione (t), che possiamo suddividere in t_1 e t_2,

una legge finanziaria si dice scindibile se il montante (M_t), ottenuto investendo il capitale (C) per un tempo totale (t), è uguale al montante ottenuto investendolo C per il periodo di tempo t_1 e, ritirato il montante prodotto (M_{t1}), reinvestito immediatamente alle stesse condizioni per il tempo t_2 , fornisce un montante pari a M_t .

Per il regime composto vale il principio matematico della scindibilità in base al quale trasferire nel tempo il capitale C con una sola operazione genera un montante uguale a quello che si otterrebbe con più operazioni

$$\mathbf{M = C\,(\,1 + i\,)^{t} = \;C(\,1 + \boldsymbol{i}\,)^{\boldsymbol{t1+t2}}}$$

Scindibilità di leggi finanziarie – 2.2

Esempio:

C_0 = 1000;

i = 0,05;

t = t1 + t2 = 3 + 2 = 5;

$$M_5 = \underbrace{1.000,00}_{C_0}\underbrace{(1+0,05)^5}_{1,27628} = 1.276,28$$

$$M_3 = \underbrace{1.000,00}_{C_0}\underbrace{(1+0,05)^3}_{1,15762} = 1.157,62$$

$$M_5 = \underbrace{1.157,62}_{M_3}\underbrace{(1+0,05)^2}_{1,10250} = \underbrace{1.000,00}_{C_0}\overbrace{\underbrace{(1+0,05)^3}_{1,15762}\underbrace{(1+0,05)^2}_{1,10250}}^{1,27628} = 1.276,28$$

Grazie per l'attenzione

Per approfondimenti e chiarimenti:

Francesco Olivieri

338-8706997

olivierifrancesco@alice.it